Лекция 10. Ортонормальдық толқындық негіздер. Көп масштабты талдау

Жалпы вейвлеттердің ортонормалданған базисы. Вейвлеттік еселі масштабтық талдау

1. Хаар базисы

$$\psi(\mathrm{x})=\begin{cases}1,[0,1/2)\\-1,[1/2,1)\end{cases},\ \|\psi\|^2=1,\ \langle\psi_{\mathrm{m,n}},\psi_{\mathrm{m',n'}}\rangle=0,\quad (m,n)\neq(m',n')$$

Ортонормалданғанын тексереміз

$$\psi_{m,n}: a_0=2, b_0=1,\ \psi_{m,n}=2^{-m/n}\psi\left(2^{-m}-n\right)$$

2. Литлвуда – Пэли базисы

Спектрал кеністігінд Хаар базисының аналогы:

$$\hat{\psi}(\xi)=\begin{cases}1,\pi\leq|\xi|\leq 2\pi\\ \quad 0,\textit{иначе}\end{cases}$$

Алғашкы фунциялар:

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}\left[e^{ix\xi}\Big|_{-2\pi}^{2\pi}-e^{ix\xi}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi x}[\sin(2\pi x)-\sin(\pi x)].$$

3. Баттла-Лемарье сплайндар базисы.

Еселі масштабты талдау

Еселі масштабты талдау бір-бірінің ішінде жататын келесі кеңістіктер:

$$\ldots V_3 \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset V_{-3} \ldots \quad (1)$$

$$\{V_j\}, V_j \subset L_2(R)$$

$$\overline{\bigcup V_j} = L_2(R) \qquad (2$$

$$\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\} \qquad (3)$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_j \qquad (4)$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - n) \in V_0, \forall n \in Z \qquad (5)$$

$\exists \varphi \in V_0 \quad \{\varphi_{0,n}\} = \{\varphi(. - n)\}$ функциялар V_0 кеңістігінде ортонормалданған базис құрайды (6).

φ функциясы масштабтайтын функция деп аталады .

Справедлива следующая теорема:

Если цепочка замкнутых подпространств $\{V_j\}$образует кратномастшабный анализ, то

Существует ортонормированный базис вейвлетов, $\{\psi_{j,ki} : j,k \in Z\}$ в $L_2(R)$, такой, что оператор проектирования на подпространство V_{j-1} представляется в виде:

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \qquad (7)$$

Одним из возможных вариантов является совокупность функций, порождаемых функцией

$\psi(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\varphi(\xi/2)$, где m_0 – 2π периодическая функция:

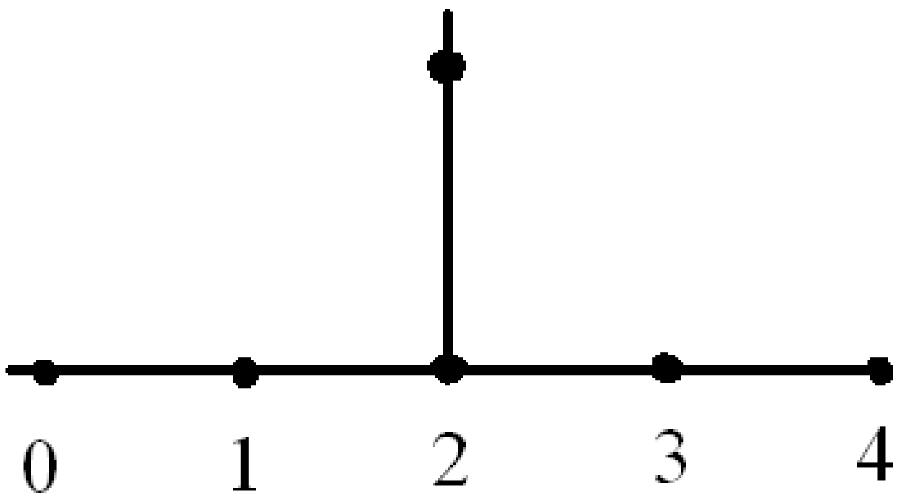
$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-in\xi}, \text{где } h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle,$$

$$\sum_n |h_n|^2 = 1 \qquad (14)$$

1 амал.   Масштабтайтын өрнекті қолданамыз

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum h_n \varphi(2x-n)$$

Итерациялық амалды тұрғызамыз



Бір нүктедегі мән беріледі, басқалары есептеледі. N=2 жағдайда алғашқы жуықтау формуласын аламыз

$$\varphi^{(1)}(x) = \sqrt{2}\sum h_n \varphi^{(0)}(2x-n)\Big|_{N=2} =$$

$$\sqrt{2}\left[h_0\varphi^{(0)}(2x) + h_1\varphi^{(0)}(2x-1) + h_2\varphi^{(0)}(2x-2) + h_3\varphi^{(0)}(2x-3)\right]$$

Осындай рекурсиялық өрнекті аралықтардың ортасындағы нүктелер үшін де алуға болады

2-ші амал. **Каскад алгоритмы.**

Теорема 1. Егер f нақты сандар R жиынында үздісіз болса, онда кез келген x ∈ R үшін келесі шек орындалады

$$\lim_{j\to\infty} 2^j \int dy f(x+y)\overline{\varphi\left(2^j y\right)} = f(x).$$

Осы теоремаға сүйеніп каскад алгоритмын алуға болады :

1) φ0 бүтін нүктелер үшін анықтаймыз 0, 0,0, …0,1,0,….
2) бүтін n үшін η0j(2-jn) есептейміз

$$\eta_j\left(2^{-j}(2K)\right) = \sqrt{2}\sum_l h_{2K-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right),$$

3) n=2k үшін

$$\eta_j\left(2^{-j}(2K+1)\right) = \sqrt{2}\sum_l h_{2K+1-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right).$$

4) n=2k+1 үшін
5) Арадағы нүктелер үшін интеполяция қолданамыз.